



Numerische Mathematik: Hausaufgabe 1

Aufgabe 1

01) 110111001.10101110
 $\begin{matrix} 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} & 2^{-4} & 2^{-5} & 2^{-6} & 2^{-7} & 2^{-8} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & . & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$
 $\Rightarrow 256 + 128 + 0 + 32 + 16 + 8 + 0 + 1 \parallel 0.5 + 0 + 0.125 + 0 + 0.03125 + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$
 \Rightarrow Ergebnis Dezimalzahl: 441.6796875

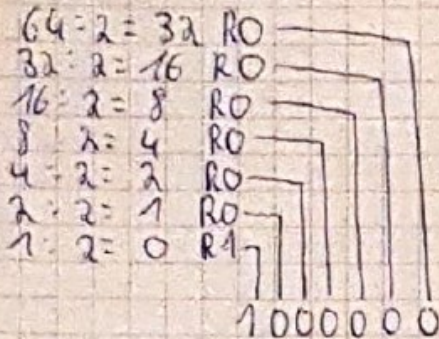
02) 1001100101.01101
 $\begin{matrix} 2^9 & 2^8 & 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} & 2^{-4} & 2^{-5} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & . & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$
 $\Rightarrow 512 + 64 + 32 + 4 + 1 \parallel 0.125 + 0.125 + 0.03125$
 \Rightarrow Ergebnis Dezimalzahl: 613.40625

03) 101.01
 $\begin{matrix} 2^2 & 2^1 & 2^0 & 2^{-1} & 2^{-2} \\ 1 & 0 & 1 & . & 0 & 1 \end{matrix}$
 $\Rightarrow 4 + 1 \parallel 0.25$
 \Rightarrow Ergebnis Dezimalzahl: 5.25

04) 100.012
 \Rightarrow $\begin{matrix} 100 : 2 = 50 & R0 \\ 50 : 2 = 25 & R0 \\ 25 : 2 = 12 & R1 \\ 12 : 2 = 6 & R0 \\ 6 : 2 = 3 & R0 \\ 3 : 2 = 1 & R1 \\ 1 : 2 = 0 & R1 \end{matrix}$
 $0.012 \cdot 2 = 0.024$
 $\begin{matrix} = 0.048 \\ = 0.096 \\ = 0.192 \\ = 0.384 \\ = 0.768 \\ = 1.536 \\ = 1.072 \\ = 0.144 \\ = 0.288 \end{matrix}$
Ergebnis Dualzahl: 1100100.000001100



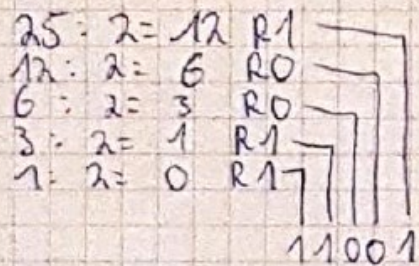
b2) 64.625



$$\begin{array}{l} 0.625 \cdot 2 = 1.25 \\ 0.25 \cdot 2 = 0.5 \\ 0.5 \cdot 2 = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 0.625 \cdot 2 = 1.25 \\ 0.25 \cdot 2 = 0.5 \\ 0.5 \cdot 2 = 1 \end{array}} \right\} 101$$

Ergebnis Dualzahl: 1000000.101

b3) 25



Ergebnis Dualzahl: 11001

c) Für b1 \Rightarrow 1100100.00000001100
 $\Rightarrow 0.11001000000001100 \cdot 2^0 \cdot 2^7$
 \Rightarrow Ergebnis: $0.11001000000001100 \cdot 2^{111}$

Für b2 \Rightarrow 1000000.101
 $\Rightarrow 0.1000000101 \cdot 2^0 \cdot 2^7$
 \Rightarrow Ergebnis: $0.1000000101 \cdot 2^{111}$

Für b3 \Rightarrow 11001
 $\Rightarrow 0.11001 \cdot 2^0 \cdot 2^5$
 \Rightarrow Ergebnis: $0.11001 \cdot 2^{101}$



Aufgabe 2

geg: $z = x \cdot y$ mit $x = 2$, $\Delta x = 0,0356$; $y = 5,6784$, $\Delta y = 0,1564$

1 a) $\Delta z = \frac{df}{dx} \cdot \Delta x + \frac{df}{dy} \cdot \Delta y$ Absolute Fehler

$$\Rightarrow \Delta z = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y = 5,6784 \cdot 0,0356 + 2 \cdot 0,1564 = \underline{\underline{0,515}}$$

$$dz = \frac{x}{f(x,y)} \cdot \frac{df}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{x} + \frac{y}{f(x,y)} \cdot \frac{df}{dy} \cdot \frac{\Delta y}{y}$$
$$= \frac{2}{11,3568} \cdot \frac{1}{5,6784} \cdot \frac{0,0356}{2} + \frac{5,6784}{11,3568} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0,1564}{5,6784} = 0,0453$$

Relative Fehler

→

$$\underline{\underline{4,53\%}}$$

2 a) $\Delta x = x - \tilde{x}$, $\Delta y = y - \tilde{y}$ mit $\tilde{x} = 2 - 0,0356 = 1,9644$
mit $\tilde{y} = 5,6784 - 0,1564 = 5,522$

Konditionszahl Abs. Fehler

$$\Rightarrow \frac{df}{d\tilde{x}} + \frac{df}{d\tilde{y}} = \tilde{y} + \tilde{x} = 5,522 + 1,9644 = \underline{\underline{7,4864}}$$

Konditionszahl Rel. Fehler:

$$\Rightarrow \frac{df}{d\tilde{x}} \cdot \frac{\tilde{x}}{f(\tilde{x},\tilde{y})} + \frac{df}{d\tilde{y}} \cdot \frac{\tilde{y}}{f(\tilde{x},\tilde{y})} \Rightarrow \frac{\tilde{y} \cdot \tilde{x}}{f(\tilde{x},\tilde{y})} + \frac{\tilde{x} \cdot \tilde{y}}{f(\tilde{x},\tilde{y})} = \frac{2 \cdot 108476}{1018476} = \underline{\underline{2}}$$



Aufgabe 3

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x \Rightarrow$ Thema der Auslöschung.

Wenn man jetzt z.B. 10^9 einsetzt $\Rightarrow f(10^9) = \sqrt{(10^9)^2 - 1} - 10^9 = \underline{\underline{0}}$
Gefahr der Auslöschung entsteht.

Jetzt Term erweitern: $\frac{\sqrt{x^2 - 1} - x \cdot \sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \Rightarrow$ jetzt 10^9 einsetzen

$\Rightarrow f(10^9) = -5 \cdot 10^{-10} \Rightarrow$ besseres Ergebnis.

Das Phänomen der Auslöschung tritt bei der Subtraktion zweier fast gleich großer Zahlen auf.



Aufgabe 4

1)

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = 0,333333 + 0,75 = 1,083333 \approx 1,0833$$

2)

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = 0,333333 \cdot 0,25$$

$$\begin{aligned} &= 0 \\ &+ 0,075 \\ &+ 0,0075 \\ &+ 0,00075 \\ &+ 0,000075 \\ &+ 0,0000075 \\ &+ 0,00000075 \end{aligned}$$

$$= 0,08333325 \approx 0,083333 = 8,3333 \cdot 10^{-2}$$

Aufgabe 5

1)

Siehe *Quelltext G08_H1_Aufgabe_5.pdf*

2)

i) Antwort:

The screenshot shows the MATLAB Editor with a script named 'funktion_rk4_verfahren.m' and 'G08_H1_Aufgabe_5.m'. The code in the editor is as follows:

```
1 - clear();
2 - clc();
3 - close all;
4
5 - %KONFIGURATION-----
6 - a=2;
7 - b=6;
8 - c=-3;
```

The Workspace window on the right shows the following variables and their values:

| Name | Value |
|----------------------------|---------|
| x1 | 0.4365 |
| x1_ausloeschung_korrigiert | 0.4365 |
| x2 | -3.4365 |
| x2_ausloeschung_korrigiert | 3.4365 |



ii) Antwort:

The screenshot shows the MATLAB Editor with a script named 'funktion_rk4_verfahren.m'. The script contains the following code:

```
1 clear();  
2 clc();  
3 close all;  
4  
5 %KONFIGURATION-----  
6 %a=2;  
7 %b=6;  
8 %c=-3;  
9 a=1;  
10 b=-14;  
11 c=49;
```

The Workspace window on the right shows the following variables and their values:

| Name | Value |
|----------------------------|-------|
| x1 | 7 |
| x1_ausloeschung_korrigiert | 7 |
| x2 | 7 |
| x2_ausloeschung_korrigiert | 7 |

iii) Antwort:

The screenshot shows the MATLAB Editor with a script named 'funktion_rk4_verfahren.m'. The script contains the following code:

```
1 clear();  
2 clc();  
3 close all;  
4  
5 %KONFIGURATION-----  
6 %a=2;  
7 %b=6;  
8 %c=-3;  
9 %a=1;  
10 %b=-14;  
11 %c=49;  
12 a=3;  
13 b=-123454321;  
14 c=2;
```

The Workspace window on the right shows the following variables and their values:

| Name | Value |
|----------------------------|------------|
| x1 | 4.1151e+07 |
| x1_ausloeschung_korrigiert | 4.1151e+07 |
| x2 | 1.8626e-08 |
| x2_ausloeschung_korrigiert | 0 |

Die Antworten aus i) und ii) stimmen exakt. Polynom iii) haben wir mit dem Bisektionsverfahren überprüft:

| i | Xu | Xo | Xm | f(Xm) | f(Xu)*f(Xm) |
|---|--------|----------|----------|-------------|-------------|
| 0 | -0.001 | 0.001 | 0 | 0 | 2 >0 |
| 1 | 0 | 0.001 | 0.0005 | 617.251.605 | <0 |
| 2 | 0 | 0.0005 | 0.00025 | 308.615.802 | <0 |
| 3 | 0 | 0.00025 | 0.000125 | 154.297.901 | <0 |
| 4 | 0 | 0.000125 | 6.25e-05 | -77.138.951 | <0 |
| 5 | 0 | 6.25e-05 | 3,13E-02 | -38.559.475 | <0 |
| 6 | 0 | 3,13E-02 | 1,56E-01 | -19.269.738 | <0 |
| 7 | 0 | 1,56E-01 | 7,81E-02 | -9.624.869 | <0 |
| 8 | 0 | 7,81E-02 | 3,91E-02 | -4.802.434 | <0 |

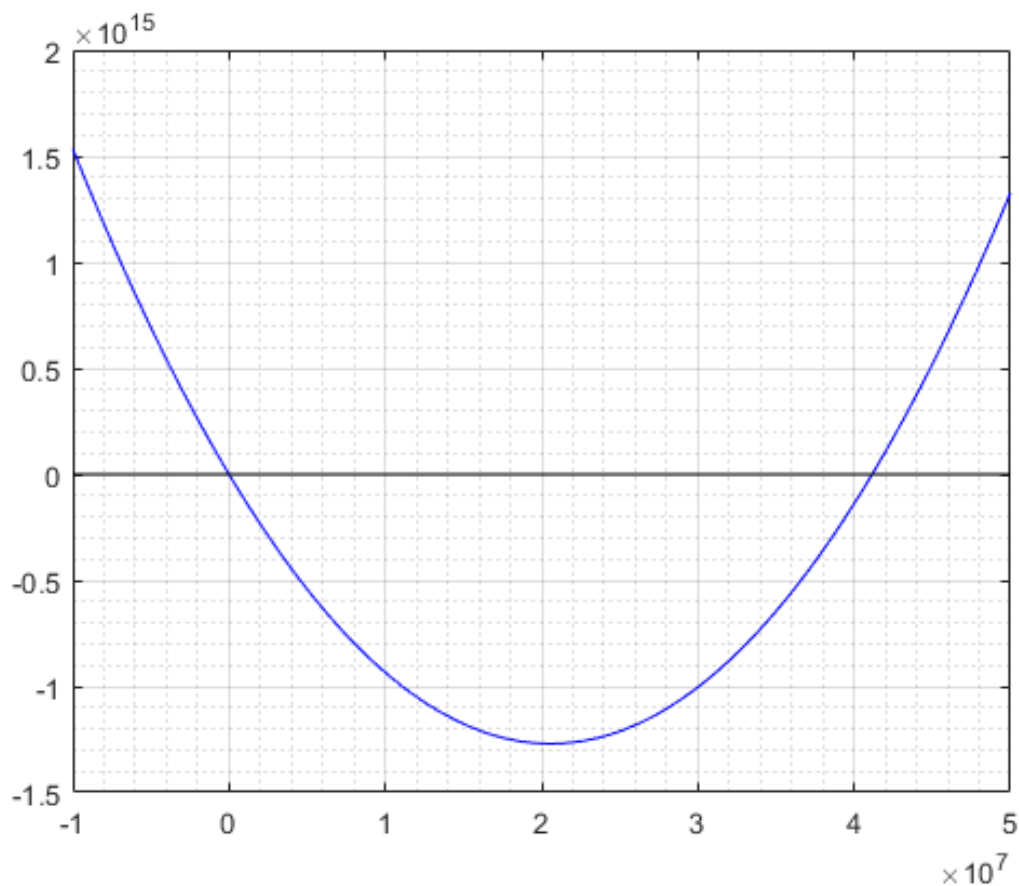


| | | | | | |
|----|----------|----------|----------|------------|----|
| 9 | 0 | 3,91E-02 | 1,95E-02 | -2.391.217 | <0 |
| 10 | 0 | 1,95E-02 | 9,77E-03 | -1.185.609 | <0 |
| 11 | 0 | 9,77E-03 | 4,88E-03 | -582.804 | <0 |
| 12 | 0 | 4,88E-03 | 2,44E-03 | -281.402 | <0 |
| 13 | 0 | 2,44E-03 | 1,22E-03 | -130.701 | <0 |
| 14 | 0 | 1,22E-03 | 6,10E-04 | -55.351 | <0 |
| 15 | 0 | 6,10E-04 | 3,05E-04 | -17.675 | <0 |
| 16 | 0 | 3,05E-04 | 1,53E-04 | 0.11624 | >0 |
| 17 | 1,53E-04 | 3,05E-04 | 2,29E-04 | -0.82565 | <0 |
| 18 | 1,53E-04 | 2,29E-04 | 1,91E-04 | -0.3547 | <0 |
| 19 | 1,53E-04 | 1,91E-04 | 1,72E-04 | -0.11923 | <0 |
| 20 | 1,53E-04 | 1,72E-04 | 1,62E-04 | -0.0014987 | <0 |
| 21 | 1,53E-04 | 1,62E-04 | 1,57E-04 | 0.057369 | >0 |
| 22 | 1,57E-04 | 1,62E-04 | 1,60E-04 | 0.027935 | >0 |
| 23 | 1,60E-04 | 1,62E-04 | 1,61E-04 | 0.013218 | >0 |
| 24 | 1,61E-04 | 1,62E-04 | 1,62E-04 | 0.0058598 | >0 |
| 25 | 1,62E-04 | 1,62E-04 | 1,62E-04 | 0.0021806 | >0 |
| 26 | 1,62E-04 | 1,62E-04 | 1,62E-04 | 0.00034095 | >0 |
| | | | - | | |
| 27 | 1,62E-04 | 1,62E-04 | 1,62E-04 | 0.00057885 | <0 |
| | | | - | | |
| 28 | 1,62E-04 | 1,62E-04 | 1,62E-04 | 0.00011895 | <0 |
| 29 | 1,62E-04 | 1,62E-04 | 1,62E-04 | 0.000111 | >0 |
| 30 | 1,62E-04 | 1,62E-04 | 1.62e-08 | -3,97E-02 | <0 |
| 31 | 1,62E-04 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 5,35E-01 | >0 |
| 32 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 2,48E-01 | >0 |
| 33 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1,04E-01 | >0 |
| 34 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 3,21E-02 | >0 |
| 35 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | -3,80E-03 | <0 |
| 36 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1,42E-02 | >0 |
| 37 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 5,18E-03 | >0 |
| 38 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 6,93E-04 | >0 |
| 39 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | -1,55E-03 | <0 |
| 40 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | -4,30E-04 | <0 |
| 41 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1,31E-04 | >0 |
| 42 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | -1,49E-04 | <0 |
| 43 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | -8,89E-06 | <0 |
| 44 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 6,13E-05 | >0 |
| 45 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 2,62E-05 | >0 |
| 46 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 8,65E-06 | >0 |
| 47 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | -1,18E-07 | <0 |
| 48 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 4,27E-06 | >0 |
| 49 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 2,07E-06 | >0 |
| 50 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 9,78E-07 | >0 |
| 51 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 4,30E-07 | >0 |



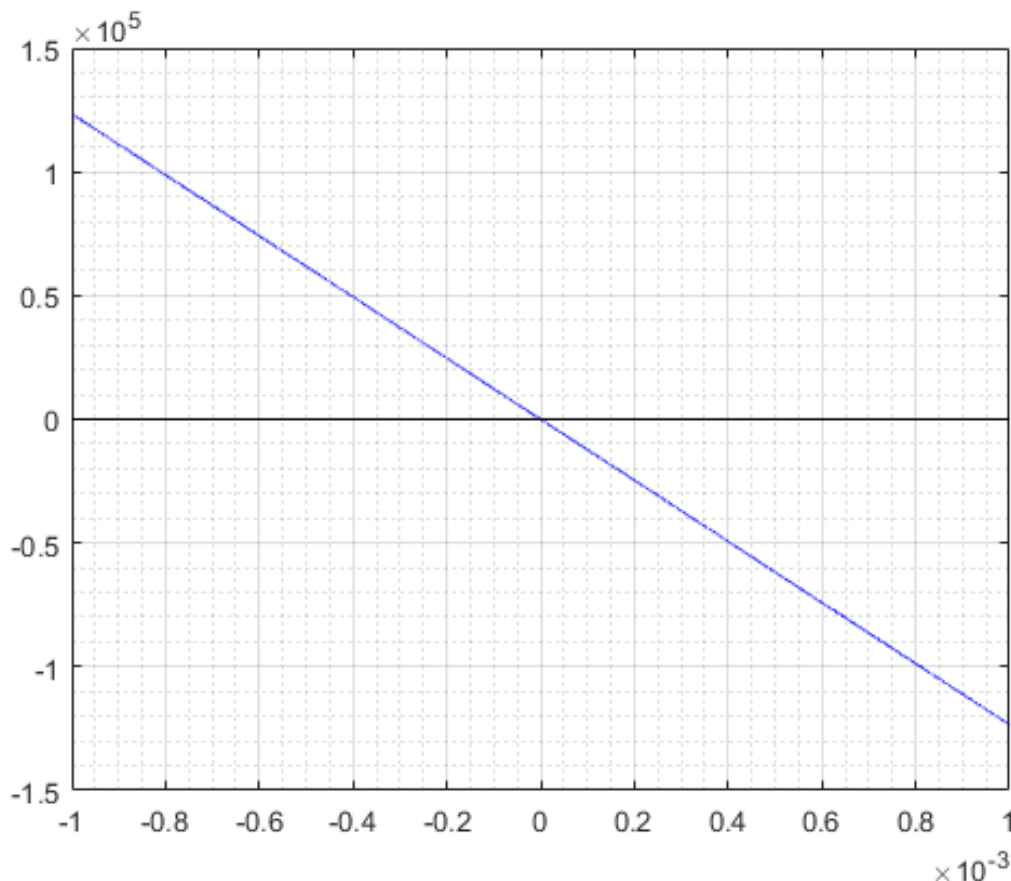
| | | | | | |
|----|----------|----------|----------|-----------|----|
| 52 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1,56E-07 | >0 |
| 53 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1,89E-08 | >0 |
| 54 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | -4,96E-08 | <0 |
| 55 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | -1,53E-08 | <0 |
| 56 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1,81E-09 | >0 |
| 57 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | -6,75E-09 | <0 |
| 58 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | -2,47E-09 | <0 |
| 59 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | -3,29E-10 | <0 |
| 60 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 7,42E-10 | >0 |
| 61 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 2,07E-11 | >0 |
| 62 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | -5,77E-11 | <0 |
| 63 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 7,11E-11 | >0 |
| 64 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 4,44E-12 | >0 |
| 65 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | -2,66E-11 | <0 |
| 66 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | -8,88E-12 | <0 |
| 67 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 1.62e-08 | 0 | 0 |

Hieraus wird ersichtlich, dass eine Nullstelle bei genau 0 liegen muss anstatt bei $1,8626 \cdot 10^{-8}$.
Wir haben parallel die Funktion geplottet, und die Funktion im Bereich der Nullstellen dargestellt:





In der Detailansicht wird ebenfalls ersichtlich, dass die Nullstelle bei exakt 0 liegen muss;



Offensichtlich wird die Grenzen der Maschinenzahlen ersichtlich, da wir sehr große Integer-Zahlen mit relativ kleinen Integer-Zahlen in **mehreren** Gleitpunktarithmetikrechnungen miteinander kombinieren.

3)

Wir haben versucht die Anzahl der Rechenoperationen zu minimieren. Hierzu folgende Herleitung:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \\ x_1 &= \frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} & x_2 &= \frac{-b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \\ x_1^2 &= \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + 2 \cdot \frac{-b}{2a} \cdot \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} + \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) & x_2^2 &= \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-b}{2a} \cdot \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} + \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) \\ x_1^2 &= \frac{b^2}{2a^2} + 2 \cdot \frac{-b}{2a} \cdot \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} - \frac{c}{a} & x_2^2 &= \frac{b^2}{2a^2} - 2 \cdot \frac{-b}{2a} \cdot \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} - \frac{c}{a} \end{aligned}$$



$$x_1^2 = \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a} - \frac{b}{a} \cdot \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$
$$x_1^2 = \frac{1}{a} \left(\frac{b^2}{2a} - c - b \cdot \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \right)$$

$$x_2^2 = \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a} + \frac{b}{a} \cdot \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$
$$x_2^2 = \frac{1}{a} \left(\frac{b^2}{2a} - c + b \cdot \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \right)$$

Um auf die Nullstellen zu schließen muss dann die Wurzel gezogen werden.

Wir haben überlegt eine Vorzeichenprüfung aus dem Ansatz aus Aufgabenteil 2 zu implementieren, um den durch die Quadrierung verlorengegangenen Vorzeicheninhalt wieder herzustellen. Wir waren uns jedoch unsicher, ob die numerischen Ungenauigkeiten sogar zu Vorzeichenfehlern führen könnten und haben uns deswegen dagegen entschieden.

Die Beträge der Nullstellen sind jedenfalls jetzt verlässlich:

The screenshot shows a MATLAB Editor window with a script named 'G08_H1_Aufgabe_5.m'. The script contains the following code:

```
clear();
clc();
close all;

%KONFIGURATION
a=2;
b=6;
c=-3;
a=1;
b=-14;
c=49;

a=3;
b=-123454321;
c=2;
```

The Workspace window on the right shows the following variables and their values:

| Name | Value |
|----------------------------|------------|
| x1 | 4.1151e+07 |
| x1_ausloeschung_korrigiert | 4.1151e+07 |
| x2 | 1.8626e-08 |
| x2_ausloeschung_korrigiert | 0 |

Aufgabe 6

Siehe *Quelltext G08_H1_Aufgabe_6.pdf*

Das Programm durchläuft die Spalten und Zeilen der Matrix in 2 for-Schleifen, die ihre Zähler an den Dimensionen der Matrix auslaufen lassen.

The screenshot shows the MATLAB Command Window with the following command and output:

```
>> sum(M)
fx Summe der Matrix ist 38.500000>>
```

Das Ergebnis stimmt mit der Handrechnung überein:

$$12,2 + 1,2 + 2 + 4 + 2 + 3 + 4 + 2,5 + 6,2 + 3,4 = 38,5$$